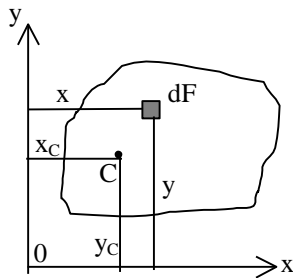


Геометрические характеристики плоских сечений

Площадь: $F = \int_F dF$, dF — элементарная площадка.

Статический момент элемента площади dF относительно оси Ox — произведение элемента площади на расстояние "y" от оси Ox : $dS_x = y \cdot dF$



Просуммировав (проинтегрировав) такие произведения по всей площади фигуры, получаем статические моменты относительно осей y и x :

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF \quad [\text{см}^3, \text{м}^3, \text{т.д.}].$$

Координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F}.$$

Статические моменты относительно центральных осей (осей, проходящих через центр тяжести сечения) равны нулю. При вычислении статических моментов сложной фигуры ее разбивают на простые части, с известными площадями F_i и координатами центров тяжести x_i, y_i . Статический момент площади всей фигуры =

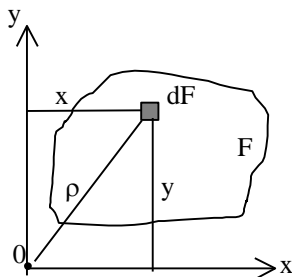
сумме статических моментов каждой ее части: $S_x = \sum_{i=1}^n F_i y_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n F_i x_i$.

Координаты центра тяжести сложной фигуры:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

Моменты инерции сечения

Осевой (экваториальный) момент инерции сечения — сумма произведений элементарных площадок dF на квадраты их расстояний до оси.



$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF \quad [\text{см}^4, \text{м}^4, \text{т.д.}].$$

Полярный момент инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) — сумма произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний от этой точки.

$$J_p = \int_F \rho^2 dF; \quad [\text{см}^4, \text{м}^4, \text{т.д.}]. \quad J_y + J_x = J_p.$$

Центробежный момент инерции сечения — сумма произведений элементарных площадок на их расстояния от двух взаимно перпендикулярных осей.

$$J_{xy} = \int_F xy dF.$$

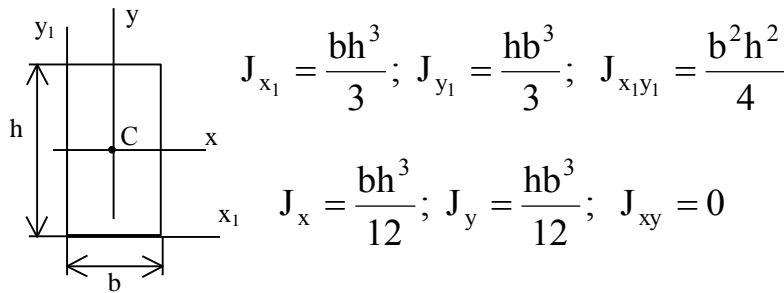
Центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с осями симметрии, равен нулю.

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

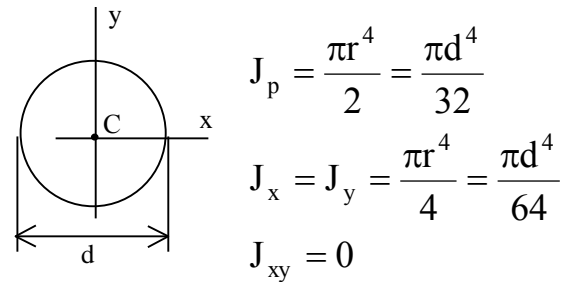
Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составных ее частей.

Моменты инерции сечений простой формы

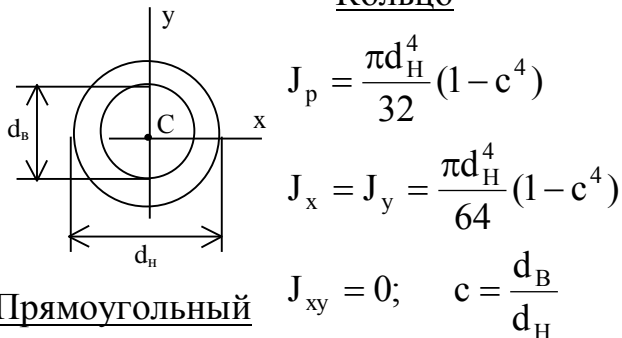
Прямоугольное сечение



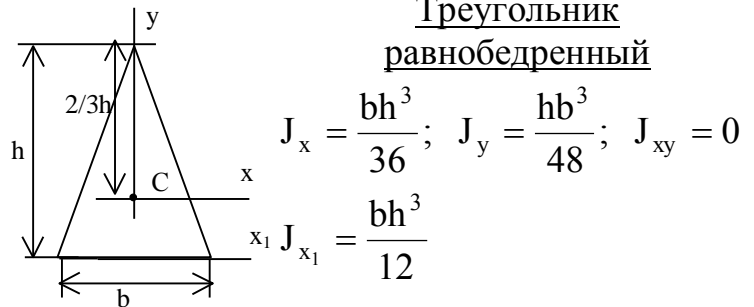
Круг



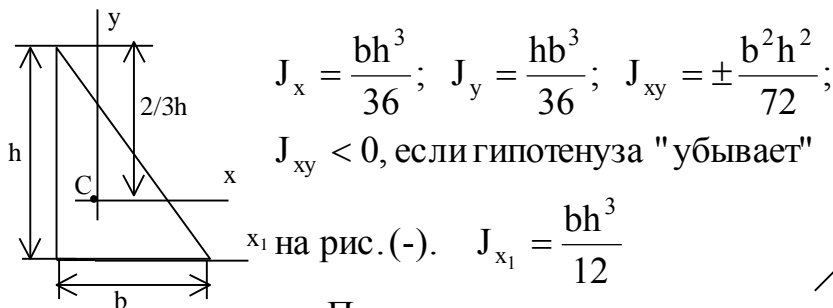
Кольцо



Треугольник равнобедренный



Прямоугольный треугольник



Четверть круга

$$J_y = J_x = 0,055R^4$$

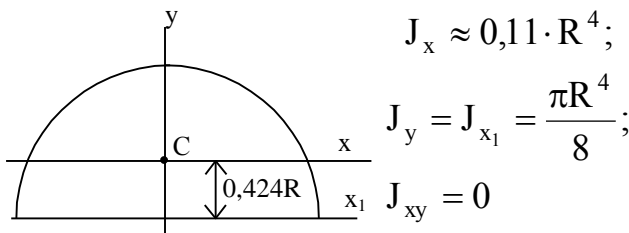
$$J_{xy} = \pm 0,0165R^4$$

на рис. (—)

$$J_{x_0} = 0,0714R^4$$

$$J_{y_0} = 0,0384R^4$$

Полукруг

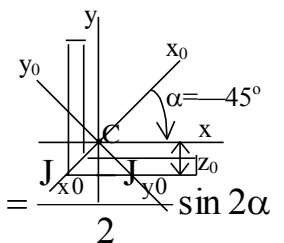
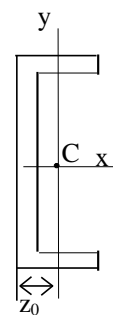
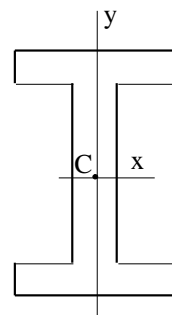


Моменты инерции стандартных профилей находятся из таблиц сортамента:

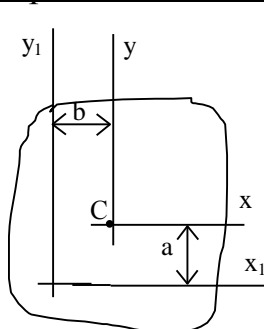
Двутавр

Швеллер

Уголок



Моменты инерции относительно параллельных осей:



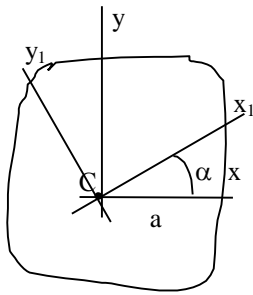
$$J_{x_1} = J_x + a^2 F;$$

$$J_{y_1} = J_y + b^2 F;$$

момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

$$J_{y_1x_1} = J_{yx} + abF;$$

("a" и "b" подставляют в формулу с учетом их знака).



Зависимость между моментами инерции при повороте осей:
 $J_{x1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha$; $J_{y1} = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha$;
 $J_{x1y1} = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$;

Угол $\alpha > 0$, если переход от старой системы координат к новой происходит против час.стр. $J_{y1} + J_{x1} = J_y + J_x$

Экстремальные (максимальное и минимальное) значения моментов инерции называются главными моментами инерции. Оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называются главными осями инерции. Главные оси инерции взаимно перпендикулярны. Центробежные моменты инерции относительно главных осей $= 0$, т.е. главные оси инерции — оси, относительно которых центробежный момент инерции $= 0$. Если одна из осей совпадает или обе совпадают с осью симметрии, то они главные. Угол,

определяющий положение главных осей: $\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{xy}}{J_y - J_x}}$, если $\alpha_0 > 0 \Rightarrow$ оси

поворачиваются против час.стр. Ось максимума всегда составляет меньший угол с той из осей, относительно которой момент инерции имеет большее значение. Главные оси, проходящие через центр тяжести, называются главными центральными осями инерции. Моменты инерции относительно этих осей:

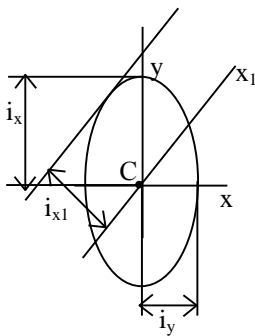
$$\boxed{J_{\max}^{\min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 \cdot J_{xy}^2}}$$

$J_{\max} + J_{\min} = J_x + J_y$. Центробежный момент инерции относительно главных центральных осей инерции равен 0. Если известны главные моменты инерции, то формулы перехода к повернутым осям:

$$J_{x1} = J_{\max} \cos^2 \alpha + J_{\min} \sin^2 \alpha; J_{y1} = J_{\max} \sin^2 \alpha + J_{\min} \cos^2 \alpha; J_{x1y1} = \frac{1}{2} (J_{\max} - J_{\min}) \sin 2\alpha;$$

Конечной целью вычисления геометрических характеристик сечения является определение главных центральных моментов инерции и положения главных

центральных осей инерции. Радиус инерции — $\boxed{i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}; i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}}; J_x = F \cdot i_x^2,$



$$J_y = F \cdot i_y^2.$$

Если J_x и J_y главные моменты инерции, то i_x и i_y — главные радиусы инерции. Эллипс, построенный на главных радиусах инерции как на полуосях, называется эллипсом инерции. При помощи эллипса инерции можно графически найти радиус инерции i_{x1} для любой оси x_1 . Для этого надо провести касательную к эллипсу, параллельную оси x_1 , и измерить расстояние от этой оси до касательной. Зная радиус инерции, можно найти момент инерции сечения

относительно оси x_1 : $J_{x1} = F \cdot i_{x1}^2$. Для сечений, имеющих более двух осей симметрии (например: круг, квадрат, кольцо и др.) осевые моменты инерции относительно всех

центральных осей равны между собой, $J_{xy}=0$, эллипс инерции обращается в круг инерции.

Моменты сопротивления.

Осевой момент сопротивления — отношение момента инерции относительно оси к расстоянию от нее до наиболее удаленной точки сечения.

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} \quad [\text{см}^3, \text{м}^3]$$

Особенно важны моменты сопротивления относительно главных центральных осей:

прямоугольник: $W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$; $W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{b^2h}{6}$; круг: $W_x=W_y = \frac{J_x}{R} = \frac{\pi \cdot R^3}{4}$,

трубчатое сечение (кольцо): $W_x=W_y = \frac{J_x}{d_H/2} = \frac{\pi \cdot d_H^3}{32} (1 - \alpha^4)$, где $\alpha = d_H/d_B$.

Полярный момент сопротивления — отношение полярного момента инерции к расстоянию от полюса до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}$$

Для круга $W_p = \frac{\pi \cdot R^3}{2}$.